ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2018

1. Η μάζα λεπτής επίπεδης πλάκας με πυκνότητα $\rho(x,y) = xy$ δίνεται από τον τύπο:

$$m = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\;\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\;\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\;\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

(α) Περιγράψτε το σχήμα της πλάκας.

(β) Αλλάζοντας μεταβλητές σε πολικές συντεταγμένες, περιγράψτε τη μάζα με ένα μόνο διπλό ολοκλήρωμα και υπολογίστε την.

2. (α) Να δείξετε ότι το πεδίο δυνάμεων $\vec{F} = f_y\hat{\imath} - f_x\hat{\jmath}$ είναι συντηρητικό αν και μόνο αν $\nabla^2 f = 0$. (Οι δείκτες δηλώνουν μερική παράγωγο)

(β) Αν $f(x,y) = e^x \sin y$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} f_y\mathrm{d}x - f_x\mathrm{d}y$.

3. Μια ταλάντωση με υστέρηση περιγράφεται από την εξίσωση $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ όπου m, b, k είναι πραγματικές, θετικές σταθερές και $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

(α) Βρείτε τις σταθερές p και ω έτσι ώστε η συνάρτηση $x(t) = Ae^{-pt}\cos(\omega t - \delta)$ να είναι η γενική λύση του συστήματος και δείξτε ότι $b^2 < 4mk$.

(β) Δείξτε ότι τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της $x(t)$ βρίσκονται στα σημεία $\tan(\omega t - \delta) = -\dfrac{p}{\omega}$.

(γ) Αν x_1 και x_2 είναι δυο συνεχόμενα τοπικά μέγιστα της $x(t)$, να δείξετε ότι: $\ln\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \dfrac{2\pi p}{\omega}$.
Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι: $\omega t_2 - \omega t_1 = 2\pi$.

(δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης όταν: (i) $m = 0$, (ii) $b = 0$, και (iii) $k = 0$.

(ε) Να βρεθούν οι συντελεστές α, β και γ ώστε η $L = e^{\alpha t}(\beta\dot{x}^2 + \gamma x^2)$ να ανταποκρίνεται στη συνάρτηση Lagrange του συστήματος.

4. Δίνεται η συνάρτηση Lagrange $L = \dfrac{1}{2}(\dot{x}^2 - 4\pi^2 x^2)$, ενός φυσικού συστήματος.

(α) Γράψτε την έκφραση που περιγράφει την ενέργεια του συστήματος (το πρώτο ολοκλήρωμα κίνησης) και αποδείξτε ότι αυτή διατηρείται.

(β) Αν επιπλέον η τροχιά του συστήματος ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $x(0) = x(1) = 0$, να δείξετε ότι δεν είναι μοναδική και να υπολογίσετε όλες τις δυνατές τροχιές.

(γ) Βρείτε την (μοναδική) τροχιά του συστήματος εάν γνωρίζεται ότι η ενέργειά του είναι $E_0 \in \mathbb{R}^+$.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Όλα τα υποερωτήματα είναι ισότιμα με 1 μονάδα. Για την επιτυχία του μαθήματος απαιτούνται 5 μονάδες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!